Współczesna Gospodarka

Contemporary Economy
Electronic Scientific Journal
www.wspolczesnagospodarka.pl

Vol. 3 Issue 2 (2012) 35-47
ISSN 2082-677X

EFEKT WZROSTU AWERSJI DO RYZYKA NA POPYT NA SAMOUBEZPIECZENIE W MODELU DYNAMICZNYM

Piotr Dudziński

Streszczenie

Poniższa praca jest poświęcona dynamicznemu modelowi samoubezpieczenia. Dowodzimy, że wzrost awersji do ryzyka nie jest wystarczającym warunkiem do wzrostu inwestycji w samoubezpieczenie, jak to ma miejsce w statycznym modelu (Dionne i Eeckhoudt). Wykazujemy, że czynnikami, które mają wpływ na decyzję są także wzajemne relacje między wielkością straty a dochodami teraźniejszymi oraz przyszłymi. Rozważamy także przypadki inwestycji w samoubezpieczenie w okresie poprzedzającym ryzyko straty, jak i w obu okresach. Wykazujemy przy tym, że oba przypadki różnią się z ekonomicznego punktu widzenia.

Słowa kluczowe: samoubezpieczenie, awersja do ryzyka, model dynamiczny

Wstęp

Osoby narażone na ryzyko utraty części lub całości swoich dóbr mogą dokonać pewnych inwestycji w działania redukujące skutki ewentualnej szkody lub prawdopodobieństwo wystąpienia tejże. Pierwsza z tych aktywności nazywana jest samoubezpieczeniem (self-insurance), druga zaś – prewencją (self-protection). Przykładowo, zakup i instalacja sejfu chroniącego kosztowności jest formą samoubezpieczenia. W przypadku włamania zostaje zredukowany rozmiar szkód, ale samo prawdpodobieństwo włamania pozostaje takie samo. Z kolei kupno i instalacja alarmu przeciwwłamaniowego zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia szkody (uruchomiony głośny alarm na ogół płoszy włamywaczy), ale jeśli alarm zostanie zneutralizowany, to szkoda nie ulegnie redukcji. Jest to więc przykład prewencji. Kupno i instalacja zraszaczy przeciwpożarowych jest inwestycją w samoubezpieczenie, ale wykrywacze dymu redukują prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru, są więc przykładem prewencji. Innymi przykładami samoubezpieczenia lub prewencji są inwestycje w poduszki powietrzne w samochodach, kaski dla rowerzystów i motocyklistów, regularne badania medyczne pomagające wykryć poważne choroby na wczesnym etapie ich rozwoju, wynajęcie prawnika w sytuacji pozwu sądowego, zatrudnienie firmy ochroniarskiej, itp.

Pierwszymi badaczami, którzy opisali i zaczęli w sposób systematyczny badać modele opisujące te zjawiska byli Becker i Ehrlich[1] (1972). Zwrócili oni też uwagę na różnice między oboma pojęciami. Praca Ehrlicha i Beckera przyciągnęła uwagę wielu ekonomistów i od tamtego czasu powstała duża liczba prac teoretycznych przyczyniających się do zrozumienia natury tych zjawisk. Okazało się też, że różnice między oboma pojęciami są znaczące i dotyczą wielu aspektów ekonomicznych. Z czasem wyróżniło się kilka głównych nurtów tematycznych dotyczących badania zjawisk związanych z samoubezpieczeniem i prewencją. Pierwszy z nich, zainicjowany przez samych twórców tych pojęć, dotyczy problemu wzajemnych relacji pomiędzy rynkowym ubezpieczeniem, samoubezpieczeniem i prewencją. Czy są one substytutami, czy są komplementarne? Ehrlich i Becker udowodnili, że samoubezpieczenie jest zawsze substytutem rynkowego ubezpieczenia, zaś prewencja może być wobec niego komplementarna przy pewnych założeniach. Praca Courbage'a[2] przyczyniła się do wyjaśnienia związków między prewencją a rynkowym ubezpieczeniem, które mogą, ale nie muszą być komplementarne.

Boyer i Dionne[3] porównywali popyt na samoubezpieczenie i ubezpieczenie rynkowe i wykazali, że jeśli jest to możliwe, to osoba niechętna ryzyku preferuje samoubezpieczenie. Ponadto udowodnili, że wydatki na prewencję są większe przy rynkowym ubezpieczeniu niż przy samoubezpieczeniu.

Empiryczne dane statystyczne nie zawsze jednak potwierdzały tezę o substytucyjności samoubezpieczenia i rynkowego ubezpieczenia. W sferze teoretycznej także pojawiły się pewne komplikacje. W swojej pracy Briys, Schlesinger i Schulenburg[4] wykazali, że przy zmianie pewnych założeń początkowych modelu opisana wcześniej substytucyjność przestaje obowiązywać. Wang[5] zaproponował ciekawe rozwiązanie problemu opisanych niezgodności. Zauważył on, że różnica między samoubezpieczeniem a prewencją jest często rozmyta i trudna do określenia, a w wielu przypadkach aktywność danej osoby prowadzi zarówno do zmniejszenia rozmiarów ewentualnej szkody, jak i redukcji prawdopodobieństwa jej wystąpienia, jest więc inwestycją zarówno w samoubezpieczenie, jak i w prewencję. Na ten problem zwrócili uwagę Ehrlich i Becker oraz Doherty[6]. Jak napisali dwaj pierwsi: „...*dobrzy prawnicy potrafią zredukować zarówno prawdopodobieństwo wyroku skazującego, jak i jego wysokość*[7]". Jednak aż do końca lat 90-tych ubiegłego wieku to zagadnienie nie został sformalizowane w postaci modelu matematycznego. Dopiero Lee[8] sformułował pojęcie „self-insurance-cum-protection" (SICP) jako połączenie samoubezpieczenia i prewencji oraz zbadał

[1] Ehrlich, I. Becker, G. S., *Market insurance, self-insurance, and self-protection*, „Journal of Political Economy", 1972, No. 80(4): 623–648.

[2] Courbage, C., *Self-insurance, self-protection and market insurance within the dual theory of choice*, „The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory", 2001, No. 26(1): 43-56.

[3] Boyer, M., Dionne, G., *Variations in the Probability and Magnitude of Loss: Their impact on Risk*, „Canadian Journal of Economics", 1983, No. 16, 411-419.

[4] Briys, E., H., Schlesinger, Schulenburg, J.M., *Reliability of risk management: market insurance, self-insurance and self-protection reconsidered*, „The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory", 1991, No. 16(1): 45-48.

[5] Wang, K. C., *Supplementary Fire Safety Equipment as a Substitute for or Complement to a Firm's Fire Insurance,* The 11th Annual Conference of Asia-Pacific Risk and Insurance Association Globalization, Innovation, Technology and Humanity, 2007, National Chengchi University, Taipei.

[6] Doherty, N.A. , *Moral hazard and pricing in the U.K. fire insurance market*, „Journal of Risk and Insurance", 1980, No. 47(2): 240-257.

[7] Ehrlich, I. Becker, G. S., *Market insurance, self-insurance, and self-protection*, „Journal of Political Economy", 1972, No. 80(4): 623–648.

[8] Lee, K., *Risk Aversion and Self-Insurance-cum-Protection,* „Journal of Risk and Uncertainty", 1998, No. 17, 139-150.

jego własności pod kątem wzrastającej awersji do ryzyka, do czego wrócimy nieco później. Wang zapełnił istniejącą lukę poprzez zbadanie relacji pomiędzy inwestycją w SICP a wykupem rynkowego ubezpieczenia. Podał on warunki determinujące ich substytucyjność oraz komplementarność. Wykazał też zgodność wyników teoretycznych z danymi statystycznymi dotyczącymi zarządzania ryzykiem związanym z pożarami w Tajwanie.

Drugi główny nurt tematyczny badań teoretycznych nad samoubezpieczeniem i prewencją dotyczy wpływu na nie stopnia awersji do ryzyka decydenta (w sensie Arrowa-Pratta). Intuicyjnie, im bardziej niechętny ryzyku decydent, tym więcej powinien zainwestować w samoubezpieczenie lub prewencję. Okazuje się jednak, że intuicja ta jest prawidłowa jedynie w przypadku samoubezpieczenia i to tylko dla rozkładu dwupunktowego, o czym za chwilę. Wzrost awersji do ryzyka może spowodować zarówno wzrost jak i spadek inwestycji w prewencję, co pokazali Dionne i Eeckhoudt[9]. Briys i Schlesinger[10] wyjaśnili ten paradoks używając pojęcia ryzykowności w sensie Rothschilda i Stiglitza. Okazuje się, że prewencja generalnie nie redukuje ryzykowności związanej z bogactwem końcowym decydenta. Jullien, Salanie, Salanie[11] udowodnili, że istnieje pewien krytyczny poziom prawdopodobieństwa poniesienia straty poniżej którego wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w prewencję. Lee we wspomnianej wcześniej pracy udowodnił istnienie analogicznego związku w przypadku SICP. Jednak, jak przyznają niektórzy badacze, opisane zjawisko nie zostało nadal dostatecznie zrozumiane i wytłumaczone. Prace Briysa i Schlesingera (1990), Chiu (2000, 2005), Eeckhoudta i Golliera (2005) oraz Li i Dionne (2010) wykazują dobitnie, że na wspomniany efekt ma wpływ także poziom przezorności decydenta („prudence") mierzony indeksem analogicznym do indeksów awersji do ryzyka Arrowa-Pratta, w którym kluczową rolę odgrywa trzecia pochodna użyteczności. Jeśli chodzi o samoubezpieczenie, to Dionne i Eeckhoudt wykazali, że wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w samoubezpieczenie niezależnie od innych czynników, co uznano za zgodne z intuicją.

Zastanawiający jest fakt, że zagadnienie wpływu poziomu awersji do ryzyka na wielkość samoubezpieczenia uznano za mało interesujące i zamknięte po wspomnianej wcześniej pracy Dionne i Eeckhoudta (1985). Dopiero ostatnio Lee[12] wykazał jednak, że jeśli istnieje możliwość wystąpienia więcej niż dwóch stanów świata, to klasyczny wynik Dionne i Eeckhoudta przestaje obowiązywać. Lee podał warunki wystarczające do tego, aby osoba wykazująca większą awersję do ryzyka inwestowała w samoubezpieczenie odpowiednio więcej lub mniej. Dopiero po ćwierćwieczu okazało się, że zagadnienie samoubezpieczenia jest bardziej złożone, niż się to wcześniej wydawało. Opisywany wynik Lee jest jedną z głównych inspiracji dla niniejszej pracy. Uświadamia on, że pewne modyfikacje i uogólnienia podstawowego modelu potrafią przełożyć się na znaczące zmiany jakościowe wniosków płynących z modelu. Poniższa praca poświęcona jest innej modyfikacji bazowego modelu samoubezpieczenia. Otóż wszystkie omawiane prace dotyczą modeli jednookresowych, są statyczne. Ryzyko szkody występuje w tym samym okresie, co działania przeciwdziałające tej szkodzie. W pewnych przypadkach jest to trafny opis sytuacji, ale nie zawsze, co podkreśla w swojej pracy Menegatti[13]. Przykładowo, właściciel firmy płaci firmie ochroniarskiej za jej usługi na bieżąco, ale istnieje wiele przykładów na przeciwdziałanie przyszłemu ryzyku. Kupno i instalacja poduszek powietrznych

---

[9] Dionne, G., Eeckhoudt, L., *Self-Insurance, Self-Protection and Increasing Risk Aversion*, „Economics Letters", 1985, No. 17(1-2): 39-42.

[10] Briys, E., Schlesinger H., *Risk Aversion and the Propensities for Self-Insurance and Self-Protection*, „Southern Economic Journal", 1990, No. 57(2): 458-467.

[11] Jullien, B., Salanie, B., Salanie, F. , *Should More Risk-Averse Agents Exert More Effort*?, Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 1999, No. 24(1): 19-25.

[12] Lee, K. , *Risk aversion and self-insurance*, „Journal of Economics", 2010, No. 101, 277-282

[13] Menegatti, M., *Optimal prevention and prudence in a two-period model*, „Mathematical Social Sciences", 2009, No. 58, 393-397.

w samochodach, zraszaczy przeciwpożarowych w pomieszczeniach są działaniami podejmowanymi w teraźniejszości, aby zredukować rozmiary ewentualnych szkód w przyszłości. W takich przypadkach model dynamiczny jest bardziej adekwatnym opisem sytuacji. W tej pracy zajmiemy się modelem samoubezpieczenia w którym zagrożenie stratą części majątku występuje w etapie drugim, interpretowanym jako „przyszłość". Przeciwdziałanie ewentualnym skutkom niekorzystnego rozwoju sytuacji ma miejsce w etapie pierwszym („teraźniejszość"). Rozważymy także przypadek, kiedy inwestycja w samoubezpieczenie ma miejsce w obu etapach; odpowiada to na przykład sytuacji w której wynajmowana firma ochroniarska musi być opłacana regularnie, a nie jednorazowo. Rozważany model jest analogiczny do modelu używanego w cytowanych pracach Menegattiego oraz Courbage i Rey. Zmiana dotyczy tego, że koncentrujemy się na problemie samoubezpieczenia, nie zaś prewencji.

Głównym celem i wynikiem pracy jest podanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby wzrost awersji do ryzyka pociągał za sobą wzrost inwestycji w samoubezpieczenie przeciw możliwej stracie części majątku w przyszłości. Warunki te sformułowane w twierdzeniach 3 i 4 mają formę matematyczną, ale ich interpretacja ekonomiczna jest przejrzysta, podamy ją we wnioskach z twierdzenia. Patrząc na całą historię postępów teoretycznej wiedzy na temat samoubezpieczenia, wydaje się, że prawdopodobnie najistotniejszym wnioskiem z nich płynącym jest spostrzeżenie, że wzrost awersji do ryzyka nie jest czynnikiem ostatecznie determinującym wzrost popytu na samoubezpieczenie, co funkcjonowało w teorii niemal jako dogmat przez ćwierć wieku. Istnieją inne czynniki (związane z czasem), które mogą spowodować spadek poziomu samoubezpieczenia. Jeśli przyjmiemy model dynamiczny, a więc taki w którym są „teraźniejszość" i „przyszłość", to wzrost awersji do ryzyka może również prowadzić do spadku inwestycji w samoubezpieczenie. Decydują wtedy czynniki takie, jak rozmiar straty w relacji do wielkości dochodów (twierdzenie 3 i 4). Oznacza to, że wprowadzenie modelu dynamicznego powoduje pod względem ekonomicznym jakościowo nowe rezultaty w porównaniu z bazowym modelem Beckera i Ehrlicha.

1. Dynamiczny model inwestycji w samoubezpieczenie

Rozważmy najprostszy model dynamiczny składający się z dwóch etapów. W pierwszym etapie (oznaczonym numerem 0, interpretowanym jako teraźniejszość) decydent dysponuje majątkiem początkowym w_0. Majątek w następnym okresie (oznaczonym numerem 1, interpretowanym jako przyszłość) oznaczmy przez w_1. Decydent dokonuje inwestycji w samoubezpieczenie w wysokości *e*, która pomniejsza jego majątek. Inwestycja ta pozwala jednak zredukować rozmiar ewentualnej szkody, która zagraża w okresie drugim. Rozmiar szkody jest zależny od inwestycji w samoubezpieczenie i oznaczamy go przez $l(e)$. Jest on malejącą funkcją inwestycji w samoubezpieczenie, co matematycznie wyraża się poprzez nierówność $l'(e) < 0$, tzn. im większa inwestycja w samoubezpieczenie, tym mniejszy rozmiar szkody. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody oznaczamy przez *p* i zakłada się, że jest ono obiektywnie znane i nie zależy od wielkości inwestycji w samoubezpieczenie (co odróżnia opisaną sytuację od przypadku prewencji). Tak więc ryzyko występuje tylko w etapie drugim (w przyszłości), ale decydent poprzez inwestycję w samoubezpieczenie przeciwdziała mu w etapie pierwszym (w teraźniejszości) lub w obu etapach. Każdy z tych przypadków ma nieco inną interpretację. Zakup sejfu na kosztowności – typowy przykład inwestycji w samoubezpieczenie - jest dokonywany jednorazowo, więc odpowiada pierwszemu przypadkowi. Z kolei wynajętą firmę ochroniarską trzeba na ogół opłacać zarówno w pierwszym etapie, jak i w drugim, co odpowiada drugiemu przypadkowi. Rozważymy oba przypadki osobno. Ich modele się różnią, zachodzą też pewne różnice własności charakteryzujących oba przypadki. Podobnie jak Menegatti oraz Courbage i Rey wykluczamy możliwość oszczędności, aby wyizolować interesujący nas efekt od możliwych interakcji samoubezpieczenia i skłonności do oszczędzania. Związki między prewencją a skłonnością do oszczędzania były badane szczegółowo przez Menegattiego. Warto dodać, że wspomniani autorzy rozważali wyłącznie możliwość prewencji w początkowym etapie.

1.1. Inwestycja w samoubezpieczenie tylko w pierwszym etapie

Końcowy majątek w etapie pierwszym wynosi $w_0 - e$, zaś w etapie drugim:

- $w_L = w_1 - l(e)$ z prawdopodobieństwem *p* , lub
- $w_N = w_1$ z prawdopodobieństwem 1 – *p*,

Oczywiście zakładamy, że strata ma dodatnią wielkość, a zatem musi zachodzić nierówność $w_L < w_N$.

Decydent maksymalizuje oczekiwaną użyteczność majątku w obu okresach rozumianą jako sumę

$$Eu = u(m_0) + \beta Eu(m_1) \tag{1}$$

gdzie m_0 i m_1 oznaczają końcowy majątek w okresie pierwszym i drugim odpowiednio. β jest stałym współczynnikiem dyskontującym oczekiwaną użyteczność i jest liczbą z przedziału $[0,1]$. Zakładamy, że decydent jest niechętny ryzyku, czyli, że $u' > 0$ i $u'' < 0$. Oczekiwana użyteczność jest więc postaci

$$Eu = u(w_0 - e) + \beta[pu(w_L) + (1-p)u(w_N)] \tag{2}$$

a po rozpisaniu

$$Eu = u(w_0 - e) + \beta\big[pu\big(w_1 - l(e)\big) + (1-p)u(w_1)\big] \tag{3}$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum to tradycyjnie $\frac{\partial Eu}{\partial e} = 0$. Po zróżniczkowaniu i niewielkich przekształceniach otrzymujemy równanie

$$-u'(w_0 - e) + \beta pu'(w_L)(-l') = 0 \tag{4}$$

a po zmianie znaku

$$u'(w_0 - e) + \beta pu'(w_L)l' = 0 \tag{5}$$

Zakładamy na temat funkcji straty, że jest wypukła, tzn. $l'' \geq 0$. Jest to typowe i często spotykane założenie. Wyraża ono tę własność, że wraz ze wzrostem inwestycji wielkość straty maleje, ale w coraz wolniejszym tempie. Można łatwo udowodnić (dowód w dodatku), że dzięki temu założeniu problem jest wklęsły, tzn., że jest spełniony warunek dostateczny istnienia ekstremum, czyli $\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} < 0$. To z kolei implikuje fakt, że istnieje rozwiązanie problemu decydenta, jest ono skończone i jednoznacznie określone. Oznaczmy przez e_u optymalną wielkość inwestycji w samoubezpieczenie.

Zakładamy teraz, że istnieje decydent o użyteczności *v* reprezentującej większą awersję do ryzyka, niż *u*. Jak wiadomo, istnieje szereg równoważnych charakteryzacji tego zjawiska. Definiuje się je na ogół następująco: premia za każde ryzyko (czyli zmienną losową) jest zawsze większa w przypadku użyteczności *v* niż dla *u*. Premia za ryzyko jest taką częścią majątku, jaką gotów jest odstąpić decydent, aby pozbyć się ryzyka. Intuicja jest więc prosta: ten, kto jest gotów zapłacić więcej za pozbycie się ryzyka, ten bardziej się go obawia, czyli wykazuje większą awersję do niego. Definicja ta jest jednak niepraktyczna, ponieważ odwołuje się do dowolnej zmiennej losowej, co jest w praktyce niemożliwe do sprawdzenia. Problem został rozwiązany przez Pratta, dzięki jego twierdzeniu.

Twierdzenie 1 (Pratta[14]). *Następujące warunki są równoważne:*

a) *decydent o użyteczności v wykazuje większą awersję do ryzyka, niż ten o użyteczności u,*
b) $-\frac{v''}{v'} \geq -\frac{u''}{u'}$
c) *użyteczność v jest wklęsłą transformacją użyteczności u, tzn. istnieje funkcja T rosnąca i wklęsła taka, że* $v(x) = T\big(u(x)\big)$ *dla dowolnego x.*

Przypomnijmy, że iloraz $-\frac{u''}{u'}$ jest nazywany indeksem Arrowa-Pratta bezwzględnej awersji do ryzyka i jest w przybliżeniu proporcjonalny do premii za małe ryzyko (aproksymacja Arrowa-Pratta).

Podpunkt c) twierdzenia Pratta wyraża zależność wiążącą awersję do ryzyka z wklęsłością funkcji użyteczności. Jak wiadomo, funkcja użyteczności reprezentująca awersję do ryzyka jest wklęsła. Punkt c) nadaje ścisły matematyczny sens intuicyjnej równoważności: większa awersja do ryzyka oznacza większą wklęsłość użyteczności. Tak więc „bardziej wklęsła” funkcja użyteczności oznacza złożenie z inną funkcją wklęsłą. Okazuje się, że można łatwo udowodnić jeszcze inny warunek charakteryzujący wzrost awersji do ryzyka, który będzie nam przydatny (dowód w dodatku matematycznym):

Twierdzenie 2. *Decydent o użyteczności v wykazuje większą awersję do ryzyka, niż ten o użyteczności u wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* $\frac{v'}{u'}$ *jest nierosnąca.*

Ponownie, intuicja jest jasna: jeśli większa niechęć do ryzyka oznacza większą wklęsłość, to użyteczność krańcowa powinna się zmniejszać w większym tempie. Zatem v' będzie się zmniejszać szybciej, niż u'.

Decydent o użyteczności v inwestuje w samoubezpieczenie analogicznie do decydenta o użyteczności u. Zakładać więc będziemy, że spełniony jest warunek konieczny $\frac{\partial Ev}{\partial e} = 0$ i wystarczający $\frac{\partial^2 Ev}{\partial e^2} < 0$ istnienia ekstremum. Warunek konieczny będzie więc postaci[15]

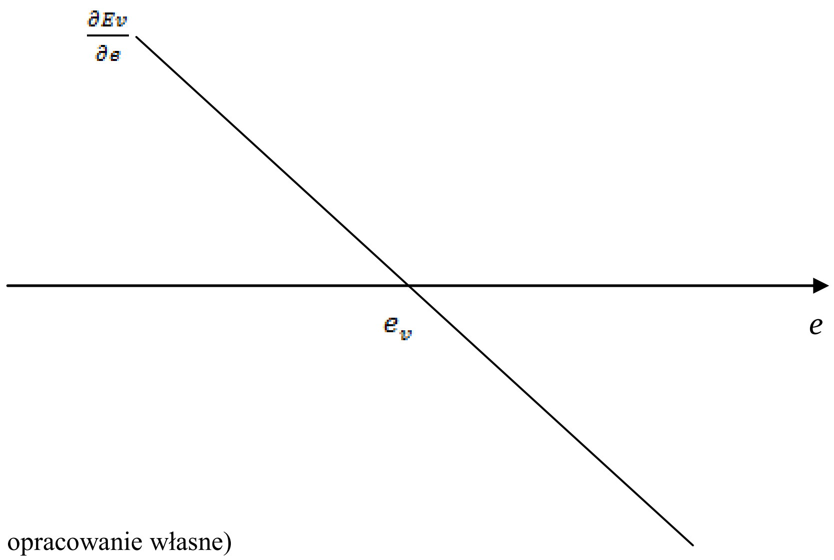
$$\frac{\partial Ev}{\partial e} = -v'(w_0 - e) + \beta p v'(w_L)(-l') = 0 \tag{6}$$

Oznaczmy przez e_v optymalną wielkość inwestycji w samoubezpieczenie, spełniającą powyższe równanie. Celem tej pracy jest porównanie wielkości e_v i e_u . W tym celu oszacujemy znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ w punkcie $e = e_u$. Z warunku dostatecznego istnienia ekstremum funkcja $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ jest malejąca i ma jedno miejsce zerowe w punkcie e_v .

---

[14] J. W. Pratt, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, „Econometrica”, 122-136 Vol. 32, 1964

[15] Zakładamy, że współczynnik β jest taki sam dla obu decydentów, aby wyizolować efekt wzrostu awersji do ryzyka poprzez uniemożliwienie interferencji z ewentualnym efektem zmiany preferencji związanych z czasem. Z tego samego powodu standardowo zakłada się, że majątek początkowy obu decydentów jest ten sam.



Rysunek 1. (źródło: opracowanie własne)

Zatem nierówność $\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) > 0$ jest równoważna temu, że $e_u < e_v$, zaś $\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) < 0$ oznacza, że $e_u > e_v$.
W celu określenia, która z nierówności zachodzi, obliczamy z (5):

$$\beta p l' = -\frac{u'(w_0 - e)}{u'(w_L)}$$

a następnie podstawiamy do wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ we wzorze (6). Otrzymujemy

$$\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) = -v'(w_0 - e_u) + v'(w_L)\frac{u'(w_0 - e_u)}{u'(w_L)} = u'(w_0 - e_u)\left(\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} - \frac{v'(w_0 - e_u)}{u'(w_0 - e_u)}\right)$$

Zauważmy, że nierówność $\frac{\partial Ev}{\partial e} \geq 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} \geq \frac{v'(w_0 - e_u)}{u'(w_0 - e_u)}$$

Decydent o użyteczności *v* jest bardziej niechętny ryzyku, niż ten o użyteczności u, a zatem funkcja $\frac{v'}{u'}$ jest nierosnąca. Otrzymujemy wówczas nierówność

$$w_L \leq w_0 - e_u$$

skąd otrzymujemy

$$w_1 - l(e_u) \leq w_0 - e_u$$

lub równoważnie

$$l(e_u) - e_u \geq w_1 - w_0$$

Udowodniliśmy zatem następujący związek:

Twierdzenie 3. *Wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w samoubezpieczenie w pierwszym etapie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$l(e_u) - e_u \geq w_1 - w_0.$$

Zauważmy po pierwsze, że można założyć, że $l(e_u) > e_u$. Tak jest, gdyż inwestycja w samubezpieczenie przekraczająca wielkość możliwej straty jest nonsensowna i może być z góry wykluczona. Zatem lewa strona nierówności jest dodatnia. Jeśli np. majątek w drugim etapie nie zwiększy się w porównaniu z pierwszym, to prawa strona nierówności jest ujemna (lub równa zeru) i nierówność jest automatycznie spełniona.

Innym powodem, dla którego nierówność jest automatycznie spełniona, jest zagrożenie wysoką stratą. Dla odpowiednio wysokich strat (przekraczających $w_1 - w_0 + e_u$) lewa strona nierówności na pewno przekracza prawą i decydent o użyteczności *v* inwestuje w samoubezpieczenie więcej, niż decydent o użyteczności *u*.

Wniosek. *Jeśli majątek w drugim etapie nie zwiększy się w porównaniu z pierwszym lub możliwe straty przekraczają pewien poziom, to wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w samoubezpieczenie w pierwszym etapie.*

2.1. Inwestycja w samoubezpieczenie w obu etapach

Na mocy przyjętych założeń, końcowy majątek w etapie pierwszym wynosi $w_0 - e$, zaś w etapie drugim:

- $w_L = w_1 - l(e) - e$ z prawdopodobieństwem *p* , lub
- $w_N = w_1 - e$ z prawdopodobieństwem 1 – *p*,

Oczywiście zakładamy, że strata ma dodatnią wielkość, a zatem musi zachodzić nierówność $w_L < w_N$.

Decydent maksymalizuje oczekiwaną użyteczność majątku w obu okresach rozumianą jako sumę

$$Eu = u(m_0) + \beta Eu(m_1) \tag{7}$$

gdzie m_0 i m_1 oznaczają końcowy majątek w okresie pierwszym i drugim odpowiednio. β jest stałym współczynnikiem dyskontującym oczekiwaną użyteczność i jest liczbą z przedziału $[0,1]$. Zakładamy, że decydent jest niechętny ryzyku, czyli, że $u' > 0$ i $u'' < 0$.

Oczekiwana użyteczność jest więc postaci

$$Eu = u(w_0 - e) + \beta[pu(w_L) + (1-p)u(w_N)] \tag{8}$$

a po rozpisaniu

$$Eu = u(w_0 - e) + \beta\left[pu\left(w_1 - e - l(e)\right) + (1-p)u(w_1 - e)\right] \tag{9}$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum to tradycyjnie $\frac{\partial Eu}{\partial e} = 0$. Po zróżniczkowaniu i niewielkich przekształceniach otrzymujemy równanie

$$-u'(w_0 - e) + \beta[pu'(w_L)(-1 - l') + (1-p)u'(w_N)(-1)] = 0 \tag{10}$$

a po zmianie znaku

$$u'(w_0 - e) + \beta[pu'(w_L)(1 + l') + (1 - p)u'(w_N)] = 0 \tag{11}$$

Zauważmy po pierwsze, że jeśli $1 + l' > 0$, to problem decydenta nie może mieć rozwiązania wewnętrznego spełniającego warunek konieczny istnienia ekstremum. Tak jest, bo wtedy każdy składnik lewej strony równania jest dodatni i równanie jest sprzeczne. Od tej pory będziemy zakładać więc, że $1 + l' < 0$, oraz że funkcja kosztów jest wypukła, tzn. $l'' \geq 0$. Jest to typowe i często spotykane założenie. Wyraża ono tę własność, że wraz ze wzrostem inwestycji wielkość straty maleje, ale w coraz wolniejszym tempie. Można łatwo udowodnić (dowód w dodatku), że dzięki temu założeniu problem jest wklęsły, tzn., że jest spełniony warunek dostateczny istnienia ekstremum, czyli $\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} < 0$. To z kolei implikuje fakt, że istnieje rozwiązanie problemu decydenta, jest ono skończone i jednoznacznie określone. Oznaczmy przez e_u optymalną wielkość inwestycji w samoubezpieczenie.

Decydent o użyteczności v inwestuje w samoubezpieczenie analogicznie do decydenta o użyteczności u. Zakładać więc będziemy, że spełniony jest warunek konieczny $\frac{\partial Ev}{\partial e} = 0$ i wystarczający $\frac{\partial^2 Ev}{\partial e^2} < 0$ istnienia ekstremum. Warunek konieczny będzie więc postaci

$$\frac{\partial Ev}{\partial e} = -v'(w_0 - e) + \beta[pv'(w_L)(-1 - l') + (1 - p)v'(w_N)(-1)] = 0 \tag{12}$$

Oznaczmy przez e_v optymalną wielkość inwestycji w samoubezpieczenie, spełniającą powyższe równanie. Celem tej pracy jest porównanie wielkości e_v i e_u . W tym celu oszacujemy znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ w punkcie $e = e_u$. Z warunku dostatecznego istnienia ekstremum funkcja $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ jest malejąca i ma jedno miejsce zerowe w punkcie e_v .

W celu określenia, która z nierówności zachodzi, obliczamy z (11):

$$1 + l'(e_u) = \frac{-u'(w_0 - e_u) - (1 - p)u'(w_N)}{\beta pu'(w_L)}$$

a następnie podstawiamy do wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ we wzorze (12). Otrzymujemy

$$\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) = -v'(w_0 - e_u) + \beta\left[pv'(w_L)\frac{u'(w_0 - e_u) + (1 - p)u'(w_N)}{\beta pu'(w_L)} + (1 - p)v'(w_N)(-1)\right]$$

Łatwo sprawdzić, że po przekształceniach otrzymamy wyrażenie w następującym kształcie:

$$\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) = \left[\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)}u'(w_0 - e_u) - v'(w_0 - e_u)\right] + \beta(1 - p)\left[\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)}u'(w_N) - v'(w_N)\right]$$

I ostatecznie

$$\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u) = u'(w_0 - e_u)\left[\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} - \frac{v'(w_0 - e_u)}{u'(w_0 - e_u)}\right] + \beta(1 - p)u'(w_N)\left[\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} - \frac{v'(w_N)}{u'(w_N)}\right]$$

Zauważmy po pierwsze, że znak wyrażenia w drugim nawiasie kwadratowym jest dodatni na mocy przyjętych założeń. Majątek w przypadku straty jest mniejszy, niż gdy straty nie ma, czyli $w_L < w_N$. Decydent o użyteczności *v* przejawia większą awersję do ryzyka, niż ten o użyteczności *u*, a zatem funkcja $\frac{v'}{u'}$ jest nierosnąca. Oznacza to, że w punkcie o mniejszej wartości w_L przyjmuje wartość większą (lub równą) niż dla wartości większej w_N . Zapiszemy to w postaci

$$\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} \geq \frac{v'(w_N)}{u'(w_N)}$$

skąd dostajemy

$$\frac{v'(w_L)}{u'(w_L)} - \frac{v'(w_N)}{u'(w_N)} \geq 0$$

Jeśli więc wyrażenie w pierwszym nawiasie będzie także dodatnie, to możemy być pewni, że taki sam znak będzie miało całe wyrażenie. Ponownie korzystamy z twierdzenia mówiącego, że funkcja $\frac{v'}{u'}$ jest nierosnąca. Stąd otrzymamy nierówność

$$w_L \leq w_0 - e_u$$

która po rozpisaniu przyjmuje postać

$$w_1 - l(e_u) - e_u \leq w_0 - e_u$$

Upraszczając otrzymujemy nierówność

$$l(e_u) \geq w_1 - w_0$$

która ma podobną interpretację ekonomiczną, jak nierówność w twierdzeniu 3. Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 4. *Jeśli zachodzi warunek $l(e_u) \geq w_1 - w_0$, to wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w samoubezpieczenie zarówno w teraźniejszości, jak i w przyszłości.*

Zauważmy ponownie, że warunek $l(e_u) \geq w_1 - w_0$ zachodzi w pewnych sytuacjach w sposób naturalny. Jeśli dochód w obu okresach jest taki sam lub gdy w przyszłości będzie mniejszy niż w teraźniejszości, to nierówność automatycznie jest spełniona. Ponadto gdy straty są odpowiednio wysokie, to nierówność też jest spełniona i teza twierdzenia zachodzi. Odnotujmy też fakt, że powyższe twierdzenie dostarcza tylko warunku wystarczającego na wzrost inwestycji w samoubezpieczenie. Analiza dowodu twierdzenia 4 przekonuje, że jeśli oba składniki wyrażenia mają różne znaki, to nie jest możliwe ustalenie znaku ich sumy, więc znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}(e_u)$ może być raz dodatni, raz ujemny. To sugeruje, że samoubezpieczenie w obu etapach różni się ekonomicznie od samoubezpieczenia w pierwszym etapie.

2. Podsumowanie

Jeśli ryzyko związane z możliwością poniesienia straty ma rozkład prawdopodobieństwa taki, że możliwe są tylko dwa stany świata, to wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w samoubezpieczenie redukujące ewentualną stratę, co jest znanym faktem od 1985 r. z pracy Dionne i Eeckhoudta. Dopiero w 2010 r. Lee zauważył, że jeśli dopuścimy możliwość większej ilości stanów świata, to teza powyższego twierdzenia przestaje być prawdziwa.

To dowodzi także tego, że model z tylko dwoma stanami świata jest nadmiernie uproszczony i nie pozwala dostrzec bardziej złożonych zjawisk związanych z tą tematyką. W niniejszej pracy dowodzimy, że analogiczna sytuacja ma miejsce gdy dopuścimy w opisie model dynamiczny samoubezpieczenia. Podaliśmy warunki konieczne i dostateczne na to, aby wzrost awersji do ryzyka przekładał się na wzrost inwestycji w samoubezpieczenie i udowodniliśmy że rolę tutaj odgrywają także rozmiar straty oraz poziom dochodów w teraźniejszości oraz w przyszłości. Dominującym wnioskiem jest jednak to, że samoubezpieczenie jest zjawiskiem ekonomicznym znacznie bardziej złożonym, niż to się do niedawna wydawało. To wskazuje, że aby w pełni zrozumieć to zjawisko, należy uzupełniać model dynamiczny o dalsze elementy. Wydaje się, że naturalne byłoby rozpocząć od wprowadzenia możliwości większej ilości stanów świata. Innym wariantem jest wprowadzenie większej ilości źródeł ryzyka, co w lepszy sposób odzwierciedlałoby ekonomiczne realia związane z podejmowaniem decyzji. Można to zrobić np. przez wprowadzenie tzw. ryzyka w tle („background risk”) które modelowałoby ryzyko związane np. z dochodami w przyszłości. Jeszcze inna możliwość to wprowadzenie ewentualności pozamaterialnego typu straty, na przykład utraty zdrowia. Wszystko to sugeruje, że można się jeszcze sporo dowiedzieć o naturze zjawiska samoubezpieczenia.

3. Dodatek

3.1 Warunek wystarczający istnienia optymalnego samoubezpieczenia

Zakładamy że funkcja straty jest wypukła, tzn. $l'' \geq 0$. Wówczas różniczkując $\frac{\partial Eu}{\partial e}$ z warunku (4) otrzymujemy, że

$$\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} = u''(w_0 - e) + \beta[pu''(w_L)(-1 - l')^2 + pu'(w_L)(-l'') + (1-p)u''(w_N)]$$

Z powodu przyjętych założeń, tzn. $u' > 0$, $u'' < 0$, $l'' \geq 0$ otrzymujemy, że $\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} < 0$, a zatem warunek wystarczający problemu optymalizacyjnego jest spełniony. Zaznaczmy, że żadne z powyższych założeń nie jest restrykcyjne, wszystkie są typowe dla opisywanej sytuacji.

3.2 Warunek równoważny wzrostowi awersji do ryzyka

Dowód twierdzenia 2. Załóżmy, że funkcja $\frac{v'}{u'}$ jest nierosnąca. Oznacza to, że jej pochodna spełnia nierówność

$$\left(\frac{v'}{u'}\right)' \leq 0$$

Po rozpisaniu otrzymujemy

$$\frac{v''u' - v'u''}{(u')^2} \leq 0.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie otrzymujemy nierówność

$$\frac{u'v'\left(\frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'}\right)}{(u')^2} \leq 0$$

która jest równoważna nierówności

$$\frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'} \leq 0$$

Po przekształceniu dochodzimy do nierówności

$$-\frac{v''}{v'} \geq -\frac{u''}{u'}$$

Zgodnie z twierdzeniem Pratta, jest to warunek równoważny temu, że uzyteczność *v* reprezentuje większą awersje do ryzyka, niż *u*.

Literatura

1. Boyer, M., Dionne, G., *Variations in the Probability and Magnitude of Loss: Their impact on Risk*, „Canadian Journal of Economics", 1983, No. 16, 411-419.
2. Briys, E., Schlesinger H., *Risk Aversion and the Propensities for Self-Insurance and Self-Protection*, „Southern Economic Journal", 1990, No. 57(2): 458-467.
3. Briys, E., H., Schlesinger, Schulenburg, J.M., *Reliability of risk management: market insurance, self-insurance and self-protection reconsidered*, „The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory**"**, 1991, No. 16(1): 45-48.
4. Chiu, W. H., *Degree of downside risk aversion and self-protection*, „Insurance: Mathematics and Economics", 2005, No. 36 , 93-101
5. Chiu, W. H., *On the propensity to self-protect* , „Journal of Risk and Insurance", 2000, No. 67(4):555–577.
6. Courbage, C., *Self-insurance, self-protection and market insurance within the dual theory of choice*, „The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory", 2001, No. 26(1): 43-56.
7. Courbage, C., Rey, B., *Optimal prevention and other risks in a two-period model*, „Mathematical social sciences", 2012, doi:10.1016/j.mathsocsci.2011.12.001
8. Dionne, G., Eeckhoudt, L., *Self-Insurance, Self-Protection and Increasing Risk Aversion*, „Economics Letters", 1985, No. 17(1-2): 39-42.
9. Dionne, G., Li, J., *The impact of prudence on optimal prevention revisited* , CIRRELT – 2010-33.
10. Doherty, N.A. , *Moral hazard and pricing in the U.K. fire insurance market*, „Journal of Risk and Insurance", 1980, No. 47(2): 240-257.
11. Eeckhoudt, L., Gollier, C., *The impact of prudence on optimal prevention*, „Economic Theory", 2005, No. 26, 989-994.
12. Ehrlich, I. Becker, G. S., *Market insurance, self-insurance, and self-protection*, „Journal of Political Economy", 1972, No. 80(4): 623–648.
13. Jullien, B., Salanie, B., Salanie, F., *Should More Risk-Averse Agents Exert More Effort*?, Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 1999, No. 24(1): 19-25.
14. Lee, K., *Risk Aversion and Self-Insurance-cum-Protection*, „Journal of Risk and Uncertainty", 1998, No. 17, 139-150.
15. Lee, K. ,*Risk aversion and self-insurance*, „Journal of Economics", 2010, No. 101, 277-282
16. Menegatti, M., Optimal prevention and prudence in a two-period model, „Mathematical Social Sciences", 2009, No. 58, 393-397.
17. Pratt, J. W., *Risk Aversion in the Small and in the Large*, „Econometrica", 122-136 Vol. 32, 1964

18. Rothschild, M., Stiglitz, J., *Increasing risk I. A definition*, „J. Econ. Theory”, 1970, No. 2, 225–243.
19. Wang, K. C., *Supplementary Fire Safety Equipment as a Substitute for or Complement to a Firm's Fire Insurance*, The 11th Annual Conference of Asia-Pacific Risk and Insurance Association Globalization, Innovation, Technology and Humanity, 2007, National Chengchi University, Taipei.

EFFECT OF INCREASE IN RISK AVERSION ON SELF-INSURANCE IN DYNAMIC MODEL

Summary

This work shows that in a two-period framework increase in risk-aversion is not a sufficient condition to invest more in self-insurance, as it is in one-period setting (Dionne and Eeckhoudt). We prove that other factors important for decision-making exist. Relationship between size of loss and future and present income is crucial in this problem. We consider two cases – when an effort to prevent risk precedes its effect and when it is simultaneous. We show that those cases are mathematically and economically different.

Keywords: self-insurance, risk aversion, dynamic model

dr Piotr Dudziński
Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Instytut Matematyki
ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk-Oliwa
e-mail: pd@mat.ug.edu.pl